Un modèle de file d'attente avec vacations et clients impatients issu des réseaux de télécommunications.

Assia Boumahdaf

LSTA
Université Pierre et Marie Curie

5èmes Rencontres des Jeunes Statisticien-ne-s, Aussois, 28 Août 2013

Plan de la présentation

Outline

Définitions générales

- Qu'est-ce-qu'un réseau de télécommunications ?
  - Ensemble d'équipements dont le rôle est de transmettre des informations entre différents utilisateurs.
  - Exemple et motivation : réseaux avioniques embarqués
- Qu'est-ce-que système temps-réel ?
  - Comportement dépend : exactitude du traitement et temps de réponse.

$\Rightarrow$ Nécessite un transfert rapide des paquets

Définitions générales

- Qu'est-ce-qu'un réseau de télécommunications ?
  - Ensemble d'équipements dont le rôle est de transmettre des informations entre différents utilisateurs.
  - Exemple et motivation : réseaux avioniques embarqués
- Qu'est-ce-que système temps-réel ?
  - Comportement dépend : exactitude du traitement et temps de réponse.

$\Rightarrow$ Nécessite un transfert rapide des paquets

Définitions générales

- Qu'est-ce-qu'un réseau de télécommunications ?
  - Ensemble d'équipements dont le rôle est de transmettre des informations entre différents utilisateurs.
  - Exemple et motivation : réseaux avioniques embarqués
- Qu'est-ce-que système temps-réel ?
  - Comportement dépend : exactitude du traitement et temps de réponse.

$\Rightarrow$ Nécessite un transfert rapide des paquets

Définitions générales

- Qu'est-ce-qu'un réseau de télécommunications ?
  - Ensemble d'équipements dont le rôle est de transmettre des informations entre différents utilisateurs.
  - Exemple et motivation : réseaux avioniques embarqués
- Qu'est-ce-que système temps-réel ?
  - Comportement dépend : exactitude du traitement et temps de réponse.

$\Rightarrow$ Nécessite un transfert rapide des paquets

Outline

Évaluation de la performance

- Paramètre de performance
  - Délai d'attente : temps qui s'écoule entre l'arrivée et la fin de traitement dans un commutateur .
- Difficultés de l'évaluation du délai dans les réseaux
  - La taille des réseaux réels.
  - Topologie du réseau.
- Formulation du problème de l'évaluation du délai.
  - Évaluer la distribution du délai vu par les paquets d'un flot en prenant en compte les contraints temps-réel.

Évaluation de la performance

- Paramètre de performance
  - Délai d'attente : temps qui s'écoule entre l'arrivée et la fin de traitement dans un commutateur .
- Difficultés de l'évaluation du délai dans les réseaux
  - La taille des réseaux réels.
  - Topologie du réseau.
- Formulation du problème de l'évaluation du délai.
  - Évaluer la distribution du délai vu par les paquets d'un flot en prenant en compte les contraints temps-réel.

Évaluation de la performance

- Paramètre de performance
  - Délai d'attente : temps qui s'écoule entre l'arrivée et la fin de traitement dans un commutateur .
- Difficultés de l'évaluation du délai dans les réseaux
  - La taille des réseaux réels.
  - Topologie du réseau.
- Formulation du problème de l'évaluation du délai.
  - Évaluer la distribution du délai vu par les paquets d'un flot en prenant en compte les contraints temps-réel.

Évaluation de la performance

- Paramètre de performance
  - Délai d'attente : temps qui s'écoule entre l'arrivée et la fin de traitement dans un commutateur .
- Difficultés de l'évaluation du délai dans les réseaux
  - La taille des réseaux réels.
  - Topologie du réseau.
- Formulation du problème de l'évaluation du délai.
  - Évaluer la distribution du délai vu par les paquets d'un flot en prenant en compte les contraints temps-réel.

Évaluation de la performance

- Paramètre de performance
  - Délai d'attente : temps qui s'écoule entre l'arrivée et la fin de traitement dans un commutateur .
- Difficultés de l'évaluation du délai dans les réseaux
  - La taille des réseaux réels.
  - Topologie du réseau.
- Formulation du problème de l'évaluation du délai.
  - Évaluer la distribution du délai vu par les paquets d'un flot en prenant en compte les contraints temps-réel.

Évaluation de la performance

- Paramètre de performance
  - Délai d'attente : temps qui s'écoule entre l'arrivée et la fin de traitement dans un commutateur .
- Difficultés de l'évaluation du délai dans les réseaux
  - La taille des réseaux réels.
  - Topologie du réseau.
- Formulation du problème de l'évaluation du délai.
  - Évaluer la distribution du délai vu par les paquets d'un flot en prenant en compte les contraints temps-réel.

Outline

Définition et notation

Définition

Une file d'attente avec impatience est entièrement déterminée par la donnée de $A/B/c/K+L-X$ où :

- A est la loi du processus d'arrivée des clients,
- B est la loi des durées de service requises,
- c est le nombre de serveurs,
- K est la taille de la file d'attente,
- L est la loi de la dealine des clients.
- X est la discipline de service.

Exemple : $M/GI/1+D$ FIFO.

Outline

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \ \ (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \ \ (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \ \ (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \;\; (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \ \ (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \ \ (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \ \ (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Caractéristiques du trafic temps-réel

- Flot temps-réel périodique avec taille de paquets constante
  - Processus d'arrivée déterministe, $T > 0$
  - Service déterministe, $\sigma > 0$
  - Deadline, $0 < K < \infty$
  - Contrainte de précédence : $K + \sigma \leq T$.
- Performance d'un seul flot : serveur en vacances
  - $(v_n, n \geq 1)$ i.i.d., intégrables de f.d.r. V telle que $V(0) = 0$.

On étudie :$D/D/1 + D \quad (FIFO)$ avec serveur en vacances .

Outline

Dynamique du modèle (1/2)

w_n = temps d'attente du client (message) n.

• Initialement le serveur est libre. Le client 0 est immédiatement servi ($w_0 = 0$).

• Le client n rejoint le serveur ($w_n < K$). A l'instant de son départ le système est vide et le serveur prend une période de vacance.

$$w_{n+1} = \min[K, (w_n + \sigma + v_{N(n+1)} - T)^+].$$

• Le client n abandonne et le client $n-1$ rejoint le serveur : $w_n = K$ et $w_{n-1} < K$. Lorsque le client $n-1$ est servis, le serveur s'absente.

$$\begin{cases} w_{n-1} + \sigma + v_{N(n)} - T \geq K \\ w_{n+1} = \min[K, (w_{n-1} + \sigma + v_{N(n)} - 2T)^+] \end{cases}$$

Dynamique du modèle (1/2)

Si $w_n = \ldots = w_{n-k+1} = K$ et $w_{n-k} < K$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \min[(w_{n-k} + u_{n-k} - kT)^+, K] \\ \text{où} \quad u_{n-k} = \sigma + v_{N(n-k+1)} - T \end{cases}$$

k : nombre de clients perdus entre deux services

$N(n+1)$: le nombre de clients servis à $(n+1)T$

$$N(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(w_k < K)}.$$

Pour chaque client perdu,

$$w_{n-k} + u_{n-k} - jT \geq K, \text{ pour } j = 0, \ldots, k-1.$$

Outline

Notations et idée de preuve

On pose pour $x \geq 0$, $W_n(x) = \mathbb{P}(w_n \leq x)$ et on introduit

$$F_n(x) = \mathbb{P}(w_n \leq x, w_k > 0, k = 1, \ldots, n-1).$$

On calcule,

$$W_n(x) := \mathbb{P}(w_n \leq x) = \sum_{k=1}^{n} u_{n-k} F_k(x).$$

où $$u_0 = 1,\ u_n = \mathbb{P}(w_n = 0).$$

On démontre $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n = \mu < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) < \infty. \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} W_n(x) = W(x).$

Théorème principal

Théorème 1 : Condition suffisante de stabilité

Dans une file d'attente déterministe $D/D/1$ avec clients impatients et vacances simples, si $\mathbb{P}(v_1 + \sigma - T < 0) > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} W_n(x) = W(w)$ existe. De plus si la f.d.r. V est continue, on a pour $0 \leq x < K$,

$$W(x) = \int_{0^-}^{K-0} \sum_{n\geq 0} V_n^x(w) dW(w)$$

avec,

$$\sum_{n\geq 0} V_n^x(w) = \mathbb{P}(0 \leq v \leq x - w - \sigma + T)$$
$$+ \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(K - w - \sigma + nT \leq v \leq x - w - \sigma + (n+1)T).$$

Outline

Théorème 2

Dans un modèle de file d'attente $D/D/1$ avec impatience tel que la suite des durées de vacances suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Sous les hypothèses du Théorème 1, $W(x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour $0 < x < K$. Et la densité de probabilité f sur $(0, K)$ est donnés par

$$f(x) = \begin{cases} W(0)\lambda\alpha e^{\lambda\sigma} e^{\lambda(\alpha e^{\lambda\sigma}-1)x}, & 0 < x < K \\ 0 & x \geq K \end{cases} \quad (1)$$

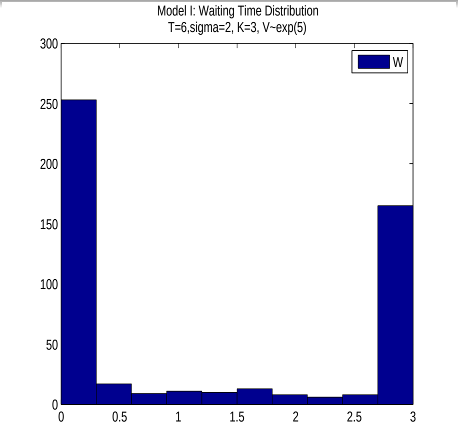
ou

$$\alpha = e^{-\lambda T}/1 - e^{-\lambda T}, \quad \alpha e^{\lambda\sigma} - 1 < 0,$$

et

$$W(0) = [1 - W(K)][\lambda K + e^{\lambda K(\alpha e^{\lambda\sigma}-1)}]^{-1}.$$

Outline


Model I: Waiting Time Distribution
T=6,sigma=2, K=3, V~exp(5)
W
300
250
200
150
100
50
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Merci de votre attention.