Problème d'Estimation du drift pour des Processus Stochastiques Périodiques

Khalil EL WALED et Dominique DEHAY

Université Rennes 2

5^{e} Rencontres des Jeunes Statisticien-ne-s
26-30 août 2013, Aussois

Plan

Introduction

Cadre

Modèle de signal périodique avec un bruit dont la variance est périodique

$$d\zeta_t = \theta f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

où

1. $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu ;
2. $f, \sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont continues périodiques de même période P, supposées connues ;
3. $W = \{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard.

Le but est :

1. L'estimation du paramètre θ à partir de l'observation d'une trajectoire du processus $\{\zeta_t\}$ sur un intervalle fini $[0, T]$, en suivant la méthode de maximum de vraisemblance ;
2. L'estimation du paramètre θ à partir d'une observation discrétisée du processus $\{\zeta_t\}$ en suivant la méthode du maximum du contraste.

Exemple

Soit $\{\xi_t, t \geq 0\}$ le processus qui vérifie l'équation différentielle stochastique linéaire suivante

$$d\xi_t = \theta f(t)\xi_t dt + \sigma(t)\xi_t dW_t. \qquad (2)$$

La relation entre ces deux processus est donnée par

$$d\zeta_t = \frac{d\xi_t}{\xi_t}.$$

Donc, dans le cas d'une observation continue nous avons les deux remarques

1. L'observation de $\{\xi_t, t \in [0, T]\}$ est équivalente à l'observation de $\{\zeta_t, t \in [0, T]\}$;

2. L'estimation de la composante du drift dans le modèle (2) est identique à cette estimation dans le modèle (1).

Les équations du type (2) apparaissent dans plusieurs domaines,

1. Finance (Karatzas et Shreve, 1991 ; Klebaner, 2006) (modèle de Black-Scholes-Merton) ;
2. Mécanique (Has'minskiĭ, 1980 ; Jankunas et Khas'minskiĭ, 1997) ;
3. Biologie (Collet and Martinez, 2008 ; Höpfner, 2007).

Et bien sûre dans d'autres domaines ! ! !

Dans le cadre d'une observation continue, des problèmes d'estimation paramétrique pour des processus périodiques de diffusion non-homogène ont été l'objet de nombreux études (voir Dehay, 2012 ; Höpfner et Kutoyants, 2010 ; Ibragimov et Hasminskii, 1981.)

Quant à une observation discrète, on peut citer les travaux de Genon-Catalot, 1990 ; Harison, 1995.

Estimation de θ à partir d'une observation continue

Dans cette section nous supposons que nous disposons d'une observation continue du processus ξ_t sur l'intervalle $[0, T]$.

Nous allons donc estimer le paramètre θ par la méthode de maximum de vraisemblance.

Pour définir la vraisemblance, nous utilisons le théorème et le corollaire suivants (voir Liptser et Shiryaev, 2001).

Théorème 1

Soit $\{\xi_t\}$ un processus d'Ito tel que

$$d\xi_t = A_t(\omega)dt + b_t(\xi)dW_t,$$

et $\{\eta_t\}$ un autre processus de diffusion de type

$$d\eta_t = a_t(\eta)dt + b_t(\eta)dW_t, \;\; \eta_0 = \xi_0, \tag{3}$$

où ξ_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable tel que $\mathrm{P}(|\xi_0| < \infty) = 1$.
Si les quatre conditions suivantes sont satisfaites alors $\mu_\xi \sim \mu_\eta$ (μ_ξ absolument continue par rapport à μ_η) où μ désigne la loi du processus, de plus on a P*-p.s. :*

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi) = \mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_0^T \alpha_t dW_t - \frac{1}{2}\alpha_t^2 dt\right) / \mathcal{F}_T\right].$$

1. Les fonctions $a_t(x), b_t(x)$ vérifient les conditions de Lipschitz qui exigent l'existence et l'unicité de solution de (3) ;
2. pour tout $0 \leq t \leq T$, l'équation $b_t(\xi)\alpha_t(\omega) = A_t(\omega) - a_t(\xi)$ admet P-p.s. une solution par rapport à $\alpha_t(\omega)$;
3. $\mathrm{P}[\int_0^T \alpha_t^2(\omega)dt < \infty] = 1$;
4. $\mathrm{E}\left[\exp\left(\int_0^T \alpha_t(\omega)dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_t^2(\omega)dt\right)\right] = 1.$

On applique ce théorème aux deux processus suivants :

$$d\xi_t^\theta = \theta f(t)\xi_t^\theta dt + \sigma(t)\xi_t^\theta dW_t,$$
$$d\xi_t^\lambda = \lambda f(t)\xi_t^\lambda dt + \sigma(t)\xi_t^\lambda dW_t.$$

On suppose que $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ vérifient : pour $\sigma(t) \neq 0$, $\frac{f(t)}{\sigma(t)} < \infty$.

Sous cette hypothèse ces deux processus vérifient les quatre conditions du Théorème 1.

Donc la loi de ξ_t^θ est absolument continue par rapport à celle de ξ_t^λ. Pour simplifier le calcul nous avons besoin du corollaire suivant.

Corollaire 1

Soit $\{\xi_t, 0 \leq t \leq T\}$ *tel que* $d\xi_t = A_t(\xi)dt + b_t(\xi)dW_t$.

Supposons que les conditions 1, 2, *et* 3 *sont satisfaites et que*

$$\mathrm{P}\left[\int_0^T (b_s^+(\xi)A_s(\xi))^2 ds < \infty\right] = \mathrm{P}\left[\int_0^T (b_s^+(\xi)a_s(\xi))^2 ds < \infty\right] = 1, \tag{4}$$

alors : $\mu_\lambda \sim \mu_\theta$ *de plus*

$$\frac{d\mu_\lambda}{d\mu_\theta}(\xi) = \exp\left(-\int_0^T (b_s^+(\xi))^2(A_s(\xi) - a_s(\xi))d\xi_s\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T (b_s^+(\xi))^2(A_s^2(\xi) - a_s^2(\xi))ds\right).$$

où

$$b_t^+ = \begin{cases} \frac{1}{b_t} & \text{si } b_t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux processus vérifient les conditions 1, 2 et 3 du Théorème 1 ainsi que la condition (4). Donc nous avons :

Pour $\sigma(t) = 0$, $\frac{d\mu_\lambda}{d\mu_\theta}(\xi) = 0$. Et pour $\sigma(t) \neq 0$

$$\frac{d\mu_\lambda}{d\mu_\theta}(\xi) = \exp\left(-\int_0^T \frac{f(s)}{\sigma^2(s)\xi_s}(\theta - \lambda)d\xi_s\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{f^2(s)}{\sigma^2(s)}(\theta^2 - \lambda^2)ds\right). \tag{5}$$

Fixons $\lambda = 0$, donc on a :

$$\frac{d\mu_0}{d\mu_\theta}(\xi) = \exp\left(-\int_0^T \frac{\theta f(s)}{\sigma^2(s)\xi_s} d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\theta^2 f^2(s)}{\sigma^2(s)} ds\right).$$

Supposons que $\{\xi_t\}$ est observé sur $[0, T]$, maximisons en θ la fonction $\frac{d\mu_0}{d\mu_\theta}(\xi)$, pour ce faire, la vraisemblance :

$$L(\theta) = \exp\left(-\theta\int_0^T \frac{f(s)}{\sigma^2(s)\xi_s} d\xi_s + \frac{\theta^2}{2}\int_0^T \frac{f^2(s)}{\sigma^2(s)} ds\right).$$

Donc

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T \frac{f(s)}{\sigma^2(s)\xi_s} d\xi_s}{\int_0^T \frac{f^2(s)}{\sigma^2(s)} ds}.$$

Lorsque $\xi_s = \xi_s^\theta$ ce qui est notre cas, on a :

$$d\xi_t^\theta = \theta f(t)\xi_t^\theta dt + \sigma(t)\xi_t^\theta dW_t.$$

Donc le paramètre θ est estimé par :

$$\hat{\theta}_T = \theta + \frac{\int_0^T \rho(s) dW_s}{\int_0^T \rho(s)^2 ds} := \theta + \frac{V_T}{J_T}.$$

Où $\rho(s) = \frac{f(s)}{\sigma(s)}$.

Nous démontrons que notre estimateur $\hat{\theta}_T$ possède de bonnes propriétés.
D'abord il est sans biais. En effet :

$$\mathrm{E}[\hat{\theta} - \theta] = E\left[\theta + \frac{\int_0^T \rho(s) dW_s}{\int_0^T \rho(s)^2 ds} - \theta\right] = 0.$$

En plus nous allons montrer qu'il converge presque sûrement, en moyenne quadratique et qu'il possède la propriété de la normalité asymptotique.

Théorème 2

Sous l'hypothèse que $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues, périodiques de période P, l'estimateur $\hat{\theta}_T$ converge presque sûrement vers θ.

Démonstration.

On pose $P = nP$ où $n \in \mathbb{N}$, $W_s^{(kP)} := W_{kP+s} - W_{kP}$.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_T - \theta &= \frac{\int_0^{nP} \rho(s) dW_s}{\int_0^{nP} \rho^2(s) ds} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \int_0^{P} \rho(s) dW_s^{(kP)}}{\int_0^{P} \rho^2(s) ds}. \end{aligned}$$

$\int_0^P \rho(s) dW_s^{(kP)}$ sont des v.a. i.i.d. la Loi forte des grands nombres donne

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_{nP} - \theta = 0.$$

Théorème 3

L'estimateur $\hat{\theta}_T$ *converge également en moyenne quadratique.*

L'estimateur normalisé $\bar{\theta}$ *défini par* $\bar{\theta}_T := \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)$ *possède la propriété de la normalité asymptotique.*

Estimation de θ à partir d'une observation discrétisée

Dans cette section nous allons étudier un modèle de type signal plus un bruit à partir d'une observation discrétisée. On considère d'abord le modèle

$$d\xi_t = \theta f(t)dt + dW_t \tag{6}$$

Pour une discrétisation $\{\xi_{t_i}\}$ $i = 0, \cdots, n$ de l'intervalle $[0, T]$ où $t_i = i\Delta_n,\ t_0 = 0, T = n\Delta_n$ l'approximation de la vraisemblance est donnée par

$$U_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta f(t_i)(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^2 f^2(t_i)\Delta_n.$$

Donc la formule de l'estimateur du paramètre θ est explicite et donnée par

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n} \tag{7}$$

Suivant Florens-Zmirou (1989) l'observation discrète est décrite par l'approximation

$$\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i} = \theta f(t_i)\Delta_n + W_{t_{i+1}} - W_{t_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_n &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \theta f^2(t_i)\Delta_n + \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n} \\
&= \theta + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n}
\end{aligned}$$

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est sans biais. Pour démontrer sa convergence en moyenne quadratique on démontre d'abord le lemme suivant

Lemme 1

Pour $f(\cdot)$ une fonction continue périodique de période P définie sur un intervalle $[0, T]$ avec $T = NP$, nous avons

$$\lim_{n\Delta_n \to \infty} \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n = \frac{1}{P} \int_0^P f^2(t)dt.$$

Démonstration.

On pose $NP := n\Delta_n$ où P est la période

$$\left|\int_0^{NP} f^2(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n\right|$$
$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n} f^2(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n\right|$$
$$\leq n\Delta_n \sup_{|t-s|\leq\Delta_n} \left|f^2(t) - f^2(s)\right|.$$

Comme $f^2(\cdot)$ est une fonction continue et périodique alors elle est uniformément continue, donc $\forall\epsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{P}\int_0^P f^2(t)dt - \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n\right| \leq \sup_{|t-s|\leq\Delta_n} \left|f^2(t) - f^2(s)\right| \leq \epsilon.$$

Théorème 4

Sous l'hypothèse que $n\Delta_n \to 0\ \infty$, $\Delta_n \to 0$ quand $n \to 0\ \infty$,

et que la fonction $f(\cdot)$ est périodique de période P, l'estimateur $\hat{\theta}_n$

converge en moyenne quadratique vers le paramètre estimé θ.

De plus nous avons

$$\lim_{n\Delta_n \to \infty} n\Delta_n \mathrm{E}\left[|\hat{\theta}_n - \theta|^2 \right] = \left(\frac{1}{P} \int_0^P f^2(t)dt \right)^{-1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[|\hat{\theta}_n - \theta|^2\right] &= \left(\mathrm{E}[\hat{\theta}_n - \theta]\right)^2 + \mathrm{var}(\hat{\theta}_n) \\
&= \mathrm{var}\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n}\right) \\
&= \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1 nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\Delta_n \to \infty} n\Delta_n \mathrm{E}\left[|\hat{\theta}_n - \theta|^2\right] &= \lim_{n\Delta_n \to \infty} \frac{n\Delta_n}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n} \\
&= \left(\frac{1}{P}\int_0^P f^2(t)dt\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 5

L'estimateur $\bar{\theta}_n = \sqrt{n\Delta_n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ *est asymptotiquement normal.*

$$\bar{\theta}_n \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{P}\int_0^P f^2(t)dt\right).$$

Simulation

On rappelle les modèles que l'on a considéré

$$d\zeta_t = \theta f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad t \geq 0,$$

$$d\xi_t = \theta f(t)\xi_t dt + \sigma(t)\xi_t dW_t.$$

Les solutions des ces deux processus sont donnés par

$$\zeta_t = \int_0^t \theta f(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dWs + \zeta_0.$$

$$\xi_t = \xi_0 \exp\left(\int_0^t \left(\theta f(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right) ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s\right).$$

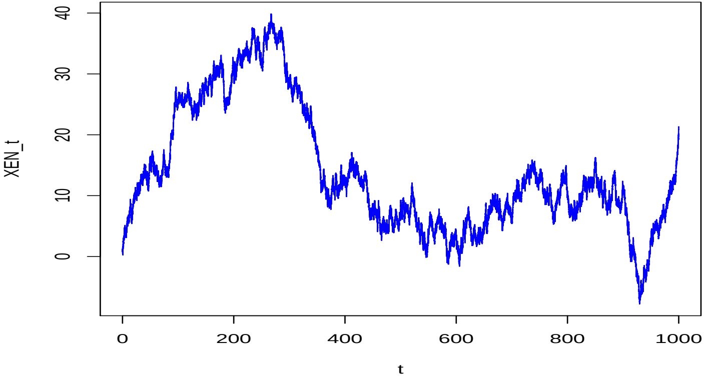

FIGURE: $\zeta_t = 2\int_0^t cos(2\pi s)ds + \int_0^t dWs.$

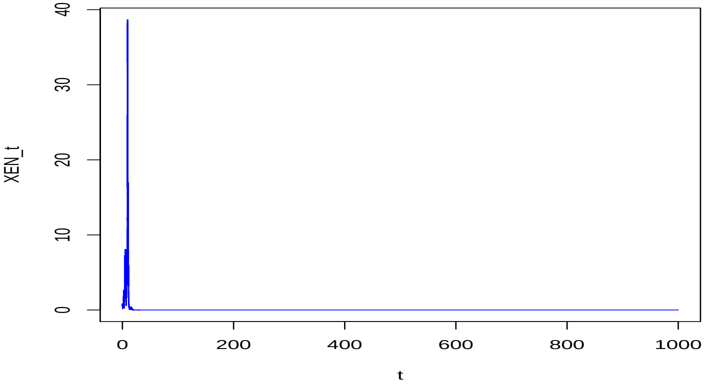

FIGURE: $\xi_t = \xi_0 \exp\left(\int_0^t \left(2cos(2\pi s) - \frac{1}{2}\right) ds + \int_0^t dW_s\right)$.

$T = nP = 1000$ taille de l'échantillon , $P = 1$. $f(t) = cos(2\pi t)$, $\sigma = 1$. $\delta = 10^{-2}$ pas de discrétisation.
Pour $\theta = 1$ nous avons les valeurs suivantes

1.0283475	0.8964058	0.9980148	1.0587421	0.9921985
1.1018021	1.0639457	0.9765544	1.0165675	0.9802615

Pour le résumé de ces valeurs nous avons

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.8964	0.9832	1.0070	1.0110	1.0510	1.1020

Pour $\theta = 2$ nous avons

2.006374	2.013498	2.098912	2.089295	2.077794
2.092664	2.163237	2.126209	2.070762	2.050495

Pour le résumé de ces valeurs nous avons

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
2.006	2.056	2.084	2.079	2.097	2.163

Merci de votre attention

- Dehay, D., 2012. Parameter maximum likelihood estimation problem for time-periodic drift Langevin type SDE (submitted).
- Dehay, D., El Waled K., 2013. *Nonparametric estimation problem for a time-periodic signal in a periodic noise*, Statist. Probab. Letters 83 608-615.
- Gardner, W.A., Napolitano, A., Paura, L., 2006. Cyclostationarity : half a century of research, *Signal Processing* 86 639–697.
- Has'minskiĭ, R.Z., 1980. *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff & Noordhoff, Alphaen aan den Rijn (The Netherlands).
- Höpfner, R., Kutoyants, Yu., 2010. Estimating discontinuous periodic signals in a time inhomogeneous diffusion. *Stat. Inference Stoch. Process.* 13 193–230.

- Ibragimov, I.A., Khas'minskiĭ, R.Z. 1981. *Statistical Estimation*, Springer, New York.
- Jankunas, A., Khas'minskiĭ, R.Z., 1997. Estimation of parameters of linear homogeneous stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.* 72 205–219.
- Karatzas, I., Shreve, S.E., 1991. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York.
- Klebaner, F.C., 2006. *Introduction to Stochastic calculus with Applications*, 2nd edition, Imperical College Press, London.
- Liptser, R.S., Shiryaev, A.N., 2001. *Statistics of Random Processes*, Second edition, Springer, Berlin.
- Serpedin, E., Pandura, F., Sari, I., Giannakis, G.B., 2005. Bibliography on cyclostationarity, *Signal Processing* 85 2233–2303.