Une approximation de la probabilité de ruine ultime du modèle de ruine de Cramer-Lundberg via un développement polynomial

P.O. Goffard[1] X. Guerrault[2] S. Loisel[3] D. Pommerêt[4]

[1] Axa France - Institut de mathématiques de Luminy
Université de Aix-Marseille

[2] Axa France

[3] Institut de Sciences financières et d'assurance
Université de Lyon, Université de Lyon 1

[4] Institut de mathématiques de Luminy
Université de Aix-Marseille

Aout 2013 / 5eme rencontre des jeunes statisticiens

Sommaire

Executive summary

Objectif

Mettre en place une nouvelle méthode numérique afin d'approcher les probabilités de ruine.

Idée

Projection orthogonale d'une densité de probabilité sur une base de polynômes.

- $\hookrightarrow$ Choisir une mesure de probabilité appartenant aux Familles Exponentielles Naturelles Quadratiques (FENQ).
- $\hookrightarrow$ Construire une base de polynômes orthogonaux par rapport à cette mesure.

Résultats

Approximation de la probabilité de ruine ultime pour des montants de sinistres suivant une distribution à queue légère.

Notations

Soit dF une mesure de probabilité univariée.

- F la fonction de répartition,
- $f = F'$ la densité de probabilité par rapport à une mesure positive,
- $\widehat{F}(\theta) = \int e^{\theta x} dF(x)$ la fonction génératrice des moments,
- $\kappa(\theta) = ln(\widehat{F}(\theta))$ la fonction génératrice des cumulants,

Soit $L^2(F)$ l'espace des fonction de carré intégrable par rapport à dF.

- $f \in L^2(F)$ si $\int f^2(x)dF(x) < \infty$.

$L^2(F)$ est un espace vectoriel normé avec :

$$||f||^2 = < f, f > = \int f^2(x)dF(x).$$

Definition et hypothèses

Soit $\{R(t); t \geq 0\}$ le processus de réserve financière :

$$R(t) = u + pt - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

où

- u est la réserve initiale,
- p est le montant des primes reçues par unité de temps,
- $N(t)$ est un processus de Poisson simple d'intensité β,
- $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires positives, **i.i.d.**, de fonction de répartition F_U et de moyenne μ.

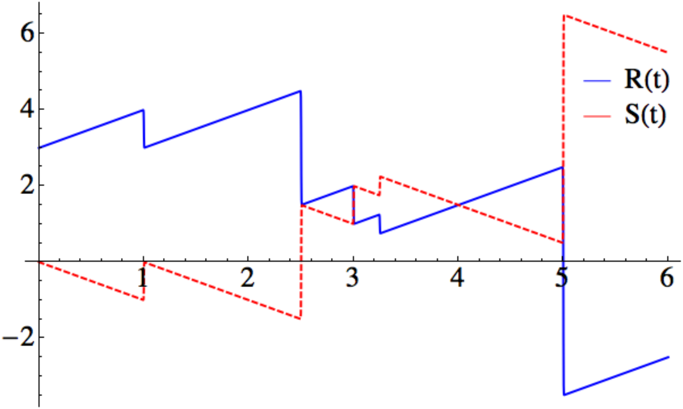
Soit $\{S(t); t \geq 0\}$ le processus de surplus :

$$S(t) = u - R(t).$$

$\eta > 0$ le chargement de sécurité définie par :

$$p = (1+\eta)\beta\mu.$$

Visualisation des processus de réserve et de surplus



Probabilité de ruine ultime

Soit $M = Sup\{S(t); t > 0\}$, la probabilité de ruine ultime est définie par :

$$\psi(u) = P(M > u) = \overline{F_M}(u).$$

La formule de Pollaczek-Khinchine

Dans le cadre du modèle de Cramer-Lundberg, la probabilité de ruine peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \psi(u) &= (1-\rho)\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n \overline{F_{U^I}^{*n}}(u), \\ M &\stackrel{D}{=} \sum_{i=1}^{N} U_i^I, \qquad F_{U^I}(x) = \int_0^x \frac{\overline{F_U(y)}}{\mu} dy, \end{aligned}$$

où N suit une loi géométrique de paramètre $\rho = \frac{\beta\mu}{p} < 1$ et $F_{U^I}^{*n}$ correspond à F_{U^I} convolué n fois avec elle-même.

Voir *Ruin probabilities* par Asmussen et Albrecher [2001] [1].

Evaluation de la probabilité de ruine : une brève revue

- L'algorithme de Panjer, Panjer (1981) [8]
- Inversion numérique de la transformée de Laplace
  - $\rightarrow$ Fast Fourrier Transform, Embrecht et al. (1993) [5]
  - $\rightarrow$ Laguerre method, Weeks (1966) [10]
- Développement en une somme pondérée de densité gamma, Bowers (1966) [4]
  - $\rightarrow$ Approximation de Beekman-Bowers, Beekman (1969) [3]
- Méthode de simulation, Kaasik (2009) [6]

Famille Exponentielle Naturelle Quadratique

Soit dF une mesure de probabilité admettant fonction génératrice des moments au voisinage de 0.

- $\{F_\mu; \mu \in \mathcal{M}\}$ definit une FEN générée par dF, telle que

$$dF_\mu(x) = exp(\phi(\mu)x - \kappa(\phi(\mu)))dF(x).$$

La fonction de variance est dite quadratique si :

$$V(\mu) = a\mu^2 + b\mu + c$$

Les FENQ sont générées par six distributions :

- Normal
- Gamma
- Hyperbolic
- Binomiale
- Binomiale Négative
- Poisson

Polynômes orthogonaux associés aux FENQ

Soit $\{F_\mu; \mu \in M\}$ une FENQ générée par dF de moyenne μ_0.

- La densité $f(x,\mu)$, par rapport à dF d'une distribution appartenant à la FENQ est proportionnelle à $exp(\phi(\mu)x - \kappa(\phi(\mu)))$.

$$Q_n(x,\mu) = V^n(\mu)\left\{\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}f(x,\mu)\right\}/f(x,\mu),$$

  est un polynôme de degré n en μ et en x.

- $f(x,\mu_0) = 1$ et

$$Q_n(x) = Q_n(x,\mu_0) = V^n(\mu_0)\left\{\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}f(x,\mu)\right\}_{\mu=\mu_0}.$$

$\{Q_n\}$ forment une famille de polynômes orthogonaux telle que :

$$< Q_n(x), Q_m(x) >= \int Q_n(x)Q_m(x)dF(x) = ||Q_n||^2\delta_{nm}.$$

Pour une description exhaustive des FENQ c.f. Barndorf-Nielsen (1978) [2] et Morris (1982) [7].

Développement polynomial et troncature

- L'ensemble des polynômes est dense dans $L^2(F)$.
  $\hookrightarrow$ $\{Q_n\}$ est donc une base orthogonale de $L^2(F)$.
- Soit dF_X une mesure de probabilité associée à une variable aléatoire X.
  $\hookrightarrow$ $\frac{dF_X}{dF}$ est la densité par rapport à dF
- Si $\frac{dF_X}{dF} \in L^2(F)$ alors :

$$\frac{dF_X}{dF}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} < \frac{dF_X}{dF}, \frac{Q_n}{||Q_n||} > \frac{Q_n(x)}{||Q_n||} = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(Q_n(X)) \frac{Q_n(x)}{||Q_n||^2}.$$

- La fonction de répartition F_X est alors :

$$F_X(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(Q_n(X)) \frac{\int_{-\infty}^{x} Q_n(y)dF(y)}{||Q_n||^2}.$$

L'approximation s'obtient alors par troncature de la série infinie :

$$F_X^K(x) = \sum_{n=0}^{K} E(Q_n(X)) \frac{\int_{-\infty}^{x} Q_n(y)dF(y)}{||Q_n||^2}.$$

Développement polynomial pour la probabilité de ruine ultime

La mesure de probabilité associée à $M=\sum_{i=1}^{N}U_i^I$ s'écrit :

$$
\begin{aligned}
dF_M(x) &= (1-\rho)\delta_0(dx)+(1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n dF_{U^I}^{*n}(x)\\
&= (1-\rho)\delta_0(dx)+dG_M(x).
\end{aligned}
$$

Si $\frac{dG_M}{dF}\in L^2(F)$ alors :

$$
\frac{dG_M}{dF}(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}<\frac{dG_M}{dF},\frac{Q_n}{||Q_n||}>\frac{Q_n(x)}{||Q_n||}.
$$

Ce qui donne pour la probabilité de ruine ultime :

$$
\psi(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}}<\frac{dG_M}{dF},\frac{Q_n}{||Q_n||}>\frac{\int_u^{+\infty}Q_n(y)dF(y)}{||Q_n||}.
$$

Approximation de la probabilité de ruine via la troncature du développement polynomial

Approximation de la probabilité de ruine

- $\{F_\mu ; \mu \in M\}$ est une FENQ générée par F de moyenne μ_0,
- $f(x,\mu) \propto exp(\phi(\mu)x - \kappa(\phi(\mu)))$ est la densité de F_μ par rapport F.

Si $\frac{dG_M}{dF} \in L^2(dF)$ alors :

$$\begin{aligned}\psi^K(u) &= \sum_{n=0}^{K} V_F(\mu_0)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \mu^n} e^{-\kappa(\phi(\mu))}\left(\widehat{G_M}(\phi(\mu))\right)\right]_{\mu=\mu_0} \\ &\times \frac{\int_u^{+\infty} Q_n(y)dF(y)}{||Q_n(x)||^2}\end{aligned}$$

Choix de la FENQ

dG_M est une mesure de probabilité défaillante de support $[0,+\infty[$. Parmi les FENQ, la seule supportée sur $[0,+\infty[$ est générée par la distribution exponentielle.

$$dF(x) = \xi e^{-\xi x} d\lambda(x)$$

Les polynômes orthogonaux liés à la mesure exponentielle sont ceux de Laguerre, voir Szegö (1939) [9]

- Quelle valeur pour ξ faut-il choisir pour vérifier la condition d'intégrabilité mentionnée précedemment ?
- $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$.
  où γ est l'unique solution positive de l'équation

$$\widehat{F_{U^I}}(s) = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow \ \xi < 2\gamma$

Choix de la FENQ

dG_M est une mesure de probabilité défaillante de support $[0,+\infty[$. Parmi les FENQ, la seule supportée sur $[0,+\infty[$ est générée par la distribution exponentielle.

$$dF(x) = \xi e^{-\xi x} d\lambda(x)$$

Les polynômes orthogonaux liés à la mesure exponentielle sont ceux de Laguerre, voir Szegö (1939) [9]

- Quelle valeur pour ξ faut-il choisir pour vérifier la condition d'intégrabilité mentionnée précedemment ?
- $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$.
  où γ est l'unique solution positive de l'équation

$$\widehat{F_{U^I}}(s) = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow \ \xi < 2\gamma$

Choix de la FENQ

dG_M est une mesure de probabilité défaillante de support $[0, +\infty[$. Parmi les FENQ, la seule supportée sur $[0, +\infty[$ est générée par la distribution exponentielle.

$$dF(x) = \xi e^{-\xi x} d\lambda(x)$$

Les polynômes orthogonaux liés à la mesure exponentielle sont ceux de Laguerre, voir Szegö (1939) [9]

- Quelle valeur pour ξ faut-il choisir pour vérifier la condition d'intégrabilité mentionnée précedemment ?
- $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$.
  où γ est l'unique solution positive de l'équation

$$\widehat{F_{U^I}}(s) = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow \xi < 2\gamma$

Choix de la FENQ

dG_M est une mesure de probabilité défaillante de support $[0, +\infty[$.
Parmi les FENQ, la seule supportée sur $[0, +\infty[$ est générée par la distribution exponentielle.

$$dF(x) = \xi e^{-\xi x} d\lambda(x)$$

Les polynômes orthogonaux liés à la mesure exponentielle sont ceux de Laguerre, voir Szegö (1939) [9]

- Quelle valeur pour ξ faut-il choisir pour vérifier la condition d'intégrabilité mentionnée précedemment ?
- $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$.
  où γ est l'unique solution positive de l'équation

$$\widehat{F_{U^I}}(s) = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow \ \xi < 2\gamma$

Choix de la FENQ

dG_M est une mesure de probabilité défaillante de support $[0, +\infty[$.
Parmi les FENQ, la seule supportée sur $[0, +\infty[$ est générée par la distribution exponentielle.

$$dF(x) = \xi e^{-\xi x} d\lambda(x)$$

Les polynômes orthogonaux liés à la mesure exponentielle sont ceux de Laguerre, voir Szegö (1939) [9]

- Quelle valeur pour ξ faut-il choisir pour vérifier la condition d'intégrabilité mentionnée précedemment ?
- $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$.
  où γ est l'unique solution positive de l'équation

$$\widehat{F_{U^I}}(s) = \frac{1}{\rho}$$

$\hookrightarrow \; \xi < 2\gamma$

Calibration des simulations

Concernant le modèle de ruine :

- Le montant des primes p est égal à 1,
- le chargement de sécurité η est égal à 20%.

Une visualisation graphique est proposée, avec en ordonnée :

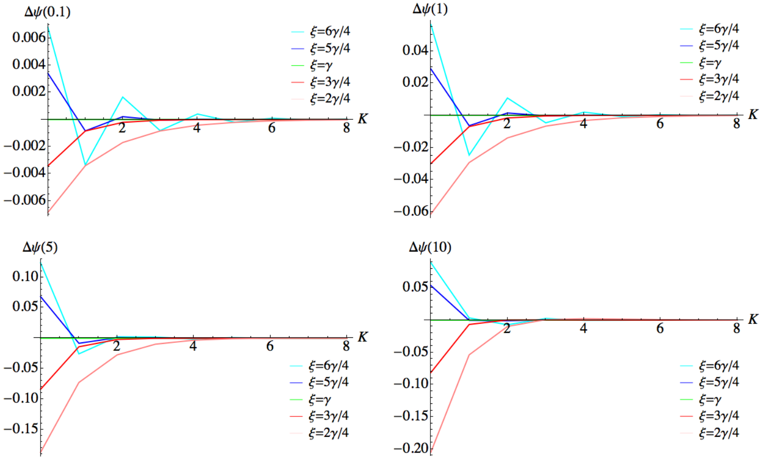
$$\Delta\psi(u) = \psi(u) - \psi^K(u),$$

pour une réserve initiale u et un ordre de troncature K (en abscisse).

$\hookrightarrow$ Differentes valeurs pour ξ sont testées dont une égale à γ.

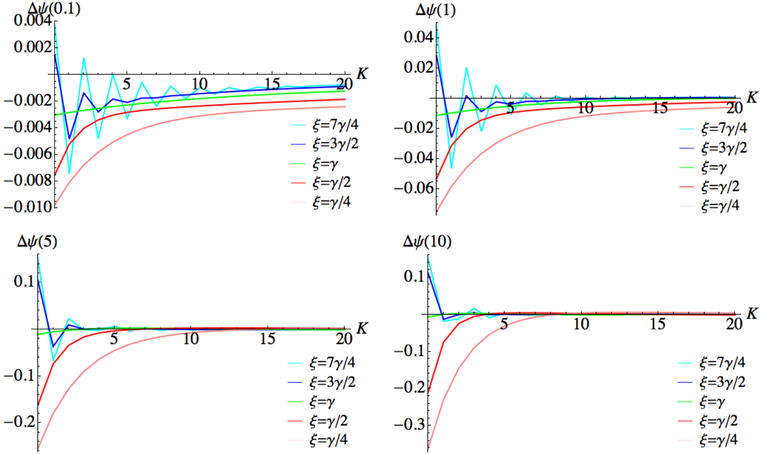
Montant de sinistres de loi exponentielle

$$f_U(x) = e^{-x} 1_{\mathbb{R}+}(x)$$



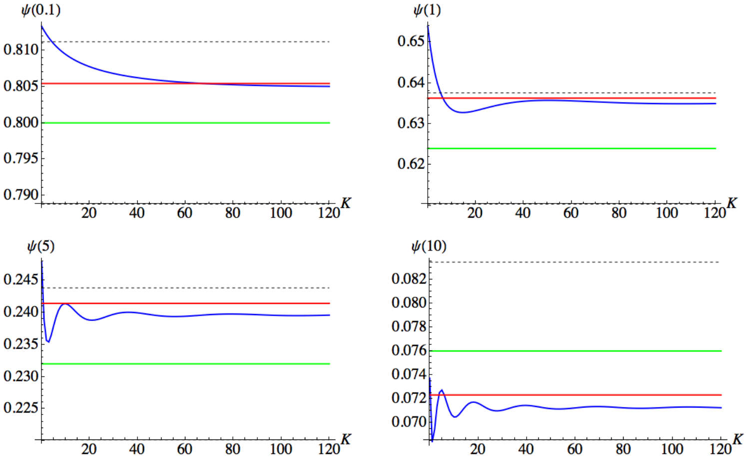
Montant de sinistres de loi $\Gamma(1/2, 1/2)$

$$f_U(x) = \frac{e^{-x/2}}{\Gamma(1/2)\sqrt{2x}} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$



Montant de sinistres de loi $\Gamma(1/3, 1)$

$$f_U(x) = \frac{e^{-x}x^{-2/3}}{\Gamma(1/3)} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$



Comparaison avec l'algorithme de Panger

u	Exact Value	Polynomials expansion $\xi = \gamma$, K=120	Panjer's algorithm h=0.01
0.1	0.821313	0.821424	0.821356
1	0.736114	0.736238	0.736395
5	0.47301	0.472944	0.473757
10	0.274299	0.274252	0.275131
50	0.00352109	0.00352476	0.00357292

u	Monte-Carlo simulations	Polynomials expansion $\xi = \gamma$, K=120	Panjer's algorithm h=0.01
0.1	0.8	0.80505	0.805454
1	0.624	0.634979	0.636315
5	0.232	0.239601	0.241442
10	0.076	0.0712518	0.0723159
50	0	4.569555×10^{-6}	4.686×10^{-6}

Conclusion

+ Une méthode numérique efficace
  $\hookrightarrow$ L'approximation peut-être aussi précise que souhaitée par l'utilisateur
+ Facile à comprendre et à implémenter
+ Il n'est pas nécessaire de discrétiser la distribution des montants.
– Limitée aux distributions à queue légère

Perspectives :

- Étude théorique de la sensitivité de l'approximation au paramètre ξ.
- Approximation de la fonction de répartition de distributions composées plus générale
  $\rightarrow$ Extension statistique

S. Asmussen and H. Albrecher.
Ruin Probabilities, volume 14 of *Advanced Series on Statistical Science Applied Probability*.
World Scientific, 2010.

O. Barndorff-Nielsen.
Information and exponential Families in Statistical Theory.
Wiley, 1978.

J.A. Beekman.
Ruin function approximation.
Transaction of society of actuaries, 21(59 AB) :41–48, 1969.

N.L. Bowers.
Expansion of probability density functions as a sum of gamma densities with applications in risk theory.
Transaction of society of actuaries, 18(52) :125–137, 1966.

P. Embrechts, P. Grübel, and S. M. Pitts.
Some applications of the fast fourier transform algorithm in insurance mathematics.
Statistica Neerlandica, 41 :59–75, March. 1993.

A. Kaasik.
Estimating ruin probabilities in the Cramér-Lundberg model with heavy-tailed claims.
Mathematical statistics, University of Tartu, Tartu, October 2009.

Carl N. Morris.
Natural exponential families with quadratic variance functions.
The Annals of Mathematical Statistics, 10(1) :65–80, 1982.

H. H. Panjer.
Recursive evaluation of a family of compound distributions.
Astin Bulletin, 12(1) :22–26, 1981.

G. Szegö.
Orthogonal Polynomials, volume XXIII.
American mathematical society Colloquium publications, 1939.

W. T. Weeks.
Numerical inversion of laplace transforms using laguerre functions.
Journal of the ACM, 13(3) :419–429, 1966.