Principe d'invariance pour le processus empirique des rapports de *m*-espacements

Moïse JÉRÉMIE

Université Pierre et Marie Curie – Paris VI
Laboratoire de Statistique théorique et Appliquée

29 août 2013

Plan

1. Préliminaires et notations
2. Historique (Résultats existants)
3. Contribution et Motivation
   - Contribution (présentation des résultats)
   - Motivation (Applications)
4. Résultats

Plan

1. Préliminaires et notations
2. Historique (Résultats existants)
3. Contribution et Motivation
   - Contribution (présentation des résultats)
   - Motivation (Applications)
4. Résultats

- Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux suites indépendantes $\{X_n : n \geq 1\}$ et $\{Y_n : n \geq 1\}$ de variables aléatoires [v.a.] indépendantes de fonctions de répartition [f.r.], $F_X(\cdot) = \mathbb{P}(X_i \leq \cdot)$ et $F_Y(\cdot) = \mathbb{P}(Y_i \leq \cdot), \quad i \geq 1.$
  Sauf mention du contraire, nous supposerons que $F_X(t) = F_Y(t) = t$, pour $0 \leq t \leq 1$, de sorte que les v.a. X et Y soient uniformément distribuées sur $(0, 1)$.
- Statistiques d'ordre, pour tout couple d'entiers $n_1, n_2 \geq 1$:

$$X_{0,n_1} := 0 < X_{1,n_1} < \ldots < X_{n_1,n_1} < X_{n_1+1,n_1} := 1, \text{ et}$$
$$Y_{0,n_2} := 0 < Y_{1,n_2} < \ldots < Y_{n_2,n_2} < Y_{n_2+1,n_2} := 1,$$

de $X_1, \ldots, X_{n_1}$ et $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$.

- Les espacements d'ordre m, pour $1 \leq m \leq (n_1 \wedge n_2) + 1$:

$$D^{(m)}_{i,n_1;X} = X_{i+m,n_1} - X_{i,n_1} \quad \text{et} \quad D^{(m)}_{j,n_2;Y} = Y_{j+m,n_2} - Y_{j,n_2}, \quad (1)$$

avec $0 \leq i \leq n_1 - m + 1$ et $0 \leq j \leq n_2 - m + 1$.

- Rapports d'espacements d'ordre m :

$$R_{i,j;n_1,n_2} = \frac{(n_1 - m + 2)D^{(m)}_{i,n_1;X}}{(n_1 - m + 2)D^{(m)}_{i,n_1;X} + (n_2 - m + 2)D^{(m)}_{j,n_2;Y}}, \quad (2)$$

pour des choix convenables de i et j. Compte tenu de l'hypothèse d'uniformité sur $(0, 1)$ des lois de X et de Y, la loi de $R_{i,j;n_1,n_2}$ est indépendante du choix de i et j et de plus lorsque $n_1 \wedge n_2 \to \infty$, on a, la convergence en loi (démontrée par Deheuvels et Derzko (2008)[20])

$$R_{i,j,n_1,n_2} \xrightarrow{d} \beta_{m,m}.$$

- Soient les suites d'indices $0 \leq i_{0,n_1} < \ldots < i_{N,n_1} \leq n_1 - m + 1$, et $0 \leq j_{0,n_2} < \ldots < j_{N,n_2} \leq n_2 - m + 1$, telles que $i_{k+1,n_1} - i_{k,n_1} \geq m$ et $j_{k+1,n_2} - j_{k,n_2} \geq m$, pour $0 \leq k \leq N \leq N_1 \wedge N_2$, où

$$N_1 := \left\lfloor \frac{n_1 + 1}{m} \right\rfloor - 1 \quad \text{et} \quad N_2 := \left\lfloor \frac{n_2 + 1}{m} \right\rfloor - 1.$$

- Paires de m-espacements disjoints, pour $k = 0, \ldots, N$:

$$S_{k,N;X}^{(m)} = D_{i_{k,n_1},n_1;X}^{(m)} = X_{i_{k,n_1}+m,n_1} - X_{i_{k,n_1},n_1} \quad \text{et}$$
$$S_{k,N;Y}^{(m)} = D_{j_{k,n_2},n_2;Y}^{(m)} = Y_{j_{k,n_2}+m,n_2} - Y_{j_{k,n_2},n_2}. \tag{3}$$

Dans toute la suite, nous allons poser dans (3), pour tout $0 \leq k \leq N$, $i_{k,n_1} = i_{0,n_1} + km$, et $j_{k,n_2} = j_{0,n_2} + km$, où $i_{0,n_1} = j_{0,n_2} = 0$, et allons donc considérer les paires de m-espacements disjoints, $S_{k,N;X}^{(m)}$ et $S_{k,N;Y}^{(m)}$, définies de la façon suivante.

$$S^{(m)}_{k,N;X} = D^{(m)}_{i_{k,n_1},n_1;X} = X_{(k+1)m,n_1} - X_{km,n_1}, \quad \text{et}$$
$$S^{(m)}_{k,N;Y} = D^{(m)}_{j_{k,n_2},n_2;Y} = Y_{(k+1)m,n_2} - Y_{km,n_2}, \text{ pour tout } \ 0 \leq k \leq N.$$

- Par convention, nous posons

$$P = P(N) = N_1 - N \geq 0 \ \text{ et } \ Q = Q(N) = N_2 - N \geq 0,$$

et supposons que N, $P = P(N)$ et $Q = Q(N)$ vérifient les conditions limites, lorsque $N \to \infty$,

$$\frac{P}{N+1} \to c \in [0, \infty], \quad \text{et} \quad \frac{Q}{N+1} \to d \in [0, \infty], \qquad (4)$$

où c et d sont des constantes (éventuellement infinies).

- Rapports de m-espacements disjoints, pour $0 \leq k \leq N \leq N_1 \wedge N_2$:

$$R_{k;n_1,n_2} = \frac{(N+P+1)\ S^{(m)}_{k,N;X}}{(N+P+1)\ S^{(m)}_{k,N;X} + (N+Q+1)\ S^{(m)}_{k,N;Y}} = \frac{(N_1+1)\ \ S^{(m)}_{k,N;X}}{(N_1+1)\ \ S^{(m)}_{k,N;X} + (N_2+1)\ \ S^{(m)}_{k,N;Y}}. \tag{5}$$

La loi de $\{R_{k;n_1,n_2} : 0 \leq k \leq N\}$ ne dépend pas de $\{i_{k,n_1}, j_{k,n_2} : 0 \leq k \leq N\}$.

- F.r empirique des rapports de *m*-espacements disjoints, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{N;n_1,n_2}(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{I}_{\{R_{k;n_1,n_2} \leq x\}}.$$

- F.r de la loi $\beta_{m,m}$, pour $m > 0$ et pour tout $0 \leq x \leq 1$:

$$H_m(x) = \frac{1}{B(m,m)} \int_0^x t^{m-1}(1-t)^{m-1} dt. \qquad (6)$$

- Processus empirique des rapports de *m*-espacements disjoints, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$\gamma_{N;n_1,n_2}(x) = (N+1)^{1/2} \left(H_{N;n_1,n_2}(x) - H_m(x)\right).$$

Plan

1. Beirlant (1984)[4].
   - Approximations fortes des processus empiriques des espacements uniformes d'ordre 1 par une suite de processus gaussiens.
2. Aly, Beirlant et Horváth (1984)[3].
   - Généralisation de ces approximations aux m-espacements uniformes disjoints pour $m \geq 1$ fixé.
3. Beirlant (1986)[5].
   - Principe d'invariance pour le processus empirique de répartition des espacements d'ordre m, pour $m \geq 1$ fixé lorsque ceux-ci sont engendrés par une suite de v.a. i.i.d. de f.r. F, et sous des conditions de régularité convenables portant sur F.

4. Deheuvels (2011)[17].
   - Approximation forte du processus empirique de répartition des espacements non-uniformes d'ordre 1 généralisé par une suite de processus gaussiens.
5. Deheuvels et Derzko (2010)[21].
   - Principe d'invariance faible pour le processus empirique de répartition basé sur les rapports d'espacements uniformes d'ordre 1 engendrés par deux suites indépendantes, $X_1, \ldots, X_{n_1}$ et $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ de v.a. i.i.d, c'est-à-dire $\gamma_{N;n_1;n_2}$ pour $m = 1$. Processus gaussien limite=Pont Brownien centré sur une moyenne de la forme :

$$B_C(t) = B(t) - 6Ct(1-t)\int_0^1 B(s)ds, \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $\{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ désigne un pont Brownien, et C, une constante dépendant du comportement limite des nombres de v.a. des deux suites de v.a.

Énoncé de leur théorème établi, lorsque les suites de v.a. $\{X_{n_1} : n_1 \geq 1\}$ et $\{Y_{n_2} : n_2 \geq 1\}$ ont chacune un nombre de v.a quelconque (i.e $n_1 \neq n_2$ et $n_1 = n_2$).

Théorème (2.1 : Deheuvels et Derzko 2010, $n_1 \neq n_2$ et $n_1 = n_2$)

Sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *de probabilité convenable, il existe deux suites* $\left\{\mathcal{B}_N^+(v) : 0 \leq v \leq 1\right\}$ *et* $\left\{\mathcal{B}_N^-(v) : 0 \leq v \leq 1\right\}$, $N = 1, 2, \ldots,$ *de ponts Browniens, liés par les relations réciproques,*

$$\mathcal{B}_N^{\pm}(v) \stackrel{d}{=} \mathcal{B}_N^{\pm}(v) - 12v(1-v)\int_0^1 \mathcal{B}_N^{\pm}(s)\,\mathrm{d}s, \quad \textit{pour} \;\; 0 \leq v \leq 1, \quad (7)$$

et vérifiant les relations, lorsque $N \to \infty$,

$$\sup_{0\leq v\leq 1}\left|\gamma_{N;n_1,n_2}(v) - \left\{\mathcal{B}_N^+(v) - 6\left(1+\sqrt{R_{N,1}}\right)v(1-v)\int_0^1 \mathcal{B}_N^+(s)\,\mathrm{d}s\right\}\right| = O_{\mathbb{P}}\left(N^{-1/4}\;(\log N)^{1/2}\right), \quad (8)$$

Théorème (2.1 : Deheuvels et Derzko 2010, $n_1 \neq n_2$ et $n_1 = n_2$: suite)

et

$$\sup_{0 \leq v \leq 1} \left| \gamma_{N;n_1,n_2}(v) - \left\{ \mathcal{B}_N^-(v) - 6\left(1 - \sqrt{R_{N,1}}\right) v(1-v) \int_0^1 \mathcal{B}_N^-(s)\,\mathrm{d}s \right\} \right| = O_{\mathbb{P}}\left(N^{-1/4} \ (\log N)^{1/2} \right), \tag{9}$$

Voir

où

$$\begin{aligned} R_{N,1} &= 1 - \frac{1}{3}\left[\frac{N+1}{N+1+P} + \frac{N+1}{N+1+Q} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left[\frac{N+1}{N_1+1} + \frac{N+1}{N_2+1} \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Plan

Plan

Généralisation du théorème de Deheuvels et Derzko (2010)[21] aux m-espacements disjoints pour un entier $m \geq 1$ fixé.

Principe d'invariance faible pour le processus empirique de répartition basé sur les rapports de m-espacements disjoints uniformes, $\gamma_{N;n_1,n_2}$. Processus gaussien limite=Pont Brownien centré sur une moyenne de la forme :

$$(B \circ H_m)_C(v) = B(H_m(v)) - 2(2m+1)C \, \frac{(2m-1)!}{m((m-1)!)^2} \times (v(1-v))^m \int_0^1 B(H_m(s))\mathrm{d}s, \qquad (11)$$

pour $0 \leq v \leq 1$, où $B(.)$ désigne un pont Brownien, H_m, la f.r. de la loi béta de paramètres m et m, et C, une constante dépendant du comportement limite des nombres de v.a. des deux suites de v.a.

Deux théorèmes : le premier lorsque les suites de v.a. $\{X_{n_1} : n_1 \geq 1\}$ et $\{Y_{n_2} : n_2 \geq 1\}$ ont des nombres de v.a quelconques (i.e $n_1 \neq n_2$ et $n_1 = n_2$) et le deuxième dans le cas où $\{X_{n_1} : n_1 \geq 1\}$ et $\{Y_{n_2} : n_2 \geq 1\}$ sont des suites indépendantes de v.a. i.i.d. de lois différentes où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ quelconques. Nous limitons cette possibilité au cas, où, pour des constantes $a, b \in \mathbb{R}$, et $e, h > 0$, $\{X_{n_1} : n_1 \geq 1\}$ et $\{Y_{n_2} : n_2 \geq 1\}$ sont des suites de v.a. i.i.d. de loi uniforme respectivement sur $(a, a+e)$ et sur $(b, b+h)$.

Plan

1. Préliminaires et notations
2. Historique (Résultats existants)
3. Contribution et Motivation
   - Contribution (présentation des résultats)
   - Motivation (Applications)
4. Résultats

i) Lois limites des statistiques de sommes de fonctionnelles de rapports de *m*-espacements disjoints uniformes pour faire éventuellement :

   a) Tests non paramétrique comme l'ont fait de nombreux auteurs grâce à des statistiques basées sur les espacements avec l'étude des lois limites correspondantes, on peut citer par exemple Darling (1953)[14], Cressie (1976, 1978)[11, 12], van Es (1992)[47] et Ekström (1999) [24].

   b) Intervalles de confiance

ii) Tests d'homogénéité avec un paramètre de localisation qui traduit le décalage entre les f.r (Test de Wilcoxon, ou test de Mann-Whitney) ▸ Voir.

Plan

1. Préliminaires et notations
2. Historique (Résultats existants)
3. Contribution et Motivation
   - Contribution (présentation des résultats)
   - Motivation (Applications)
4. Résultats

Le théorème 4.1 suivant généralise le théorème 2.1 de Deheuvels et Derzko (2010)[21] aux *m*-espacements disjoints.

Théorème (4.1)

Sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *de probabilité convenable, il existe deux suites* $\left\{\mathcal{B}_N^+(v) : 0 \le v \le 1\right\}$ *et* $\left\{\mathcal{B}_N^-(v) : 0 \le v \le 1\right\}$, $N = 1, 2, \ldots,$ *de ponts Browniens, liés par les relations réciproques,*

$$\mathcal{B}_N^\pm \circ H_m(v) \stackrel{d}{=} \mathcal{B}_N^\pm \circ H_m(v) - 8(2m+1)\,\frac{(2m-1)!}{2m\,((m-1)!)^2} \times (v(1-v))^m \int_0^1 \mathcal{B}_N^\pm \circ H_m(s)\,\mathrm{d}s, \text{ pour } 0 \le v \le 1, \quad (12)$$

Théorème (4.1 : suite)

et vérifiant les relations, lorsque $N \to \infty$,

$$\sup_{0 \le v \le 1} \Bigg| \gamma_{N;n_1,n_2}(v) - \Bigg\{ \mathcal{B}_N^+ \circ H_m(v) - 4(2m+1) \frac{(2m-1)!}{2m \ \left((m-1)!\right)^2} \left(1 + \sqrt{R_{N,m}}\right) \times \left(v(1-v)\right)^m \int_0^1 \mathcal{B}_N^+ \circ H_m(s) \, \mathrm{d}s \Bigg\} \Bigg| = O_{\mathbb{P}} \left(N^{-1/4} \ (\log N)^{1/2} \right), \tag{13}$$

Voir

et

$$\sup_{0 \le v \le 1} \Bigg| \gamma_{N;n_1,n_2}(v) - \Bigg\{ \mathcal{B}_N^- \circ H_m(v) - 4(2m+1) \frac{(2m-1)!}{2m \ \left((m-1)!\right)^2} \left(1 - \sqrt{R_{N,m}}\right) \times \left(v(1-v)\right)^m \int_0^1 \mathcal{B}_N^- \circ H_m(s) \, \mathrm{d}s \Bigg\} \Bigg| = O_{\mathbb{P}} \left(N^{-1/4} \ (\log N)^{1/2} \right), \tag{14}$$

Théorème (4.1 : suite)

$$\begin{aligned} \text{où} \quad R_{N,m} &= 1 - \frac{m}{2m+1}\left[\frac{N+1}{N+1+P} + \frac{N+1}{N+1+Q}\right] \\ &= 1 - \frac{m}{2m+1}\left[\frac{N+1}{N_1+1} + \frac{N+1}{N_2+1}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Dans le théorème 4.2 suivant, nous considérons le cas où $\{X_{n_1} : n_1 \geq 1\}$ et $\{Y_{n_2} : n_2 \geq 1\}$ sont des suites indépendantes de v.a. i.i.d. de lois différentes où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ quelconques. Nous limitons cette possibilité au cas, où, pour des constantes $a, b \in \mathbb{R}$, et $e, h > 0$, $\{X_{n_1} : n_1 \geq 1\}$ et $\{Y_{n_2} : n_2 \geq 1\}$ sont des suites de v.a. i.i.d. de loi uniforme respectivement sur $(a, a+e)$ et sur $(b, b+h)$. Nous énonçons ainsi la variante correspondante du théorème 4.1, le théorème 4.2 suivant.

Théorème (4.2)

Si $X \overset{d}{=} \mathcal{U}(a, a+e)$ *et* $Y \overset{d}{=} \mathcal{U}(b, b+h)$. *Alors, sur un espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *de probabilité convenable, il existe deux suites* $\{\mathcal{B}_N^+(v) : 0 \leq v \leq 1\}$ *et* $\{\mathcal{B}_N^-(v) : 0 \leq v \leq 1\}$, $N = 1, 2, \ldots,$ *de ponts Browniens, liés par les relations réciproques,*

$$\mathcal{B}_N^\pm \circ H_m\left(\frac{vh}{vh+(1-v)e}\right) \overset{d}{=} \mathcal{B}_N^\pm \circ H_m\left(\frac{vh}{vh+(1-v)e}\right) - 8(2m+1)\times \frac{(2m-1)!}{2m\left((m-1)!\right)^2}\left(\frac{vh(1-v)e}{(vh+(1-v)e)^2}\right)^m \int_0^1 \mathcal{B}_N^\pm \circ H_m(s)\,\mathrm{d}s, \tag{16}$$

pour $0 \leq v \leq 1$, *et vérifiant les relations, lorsque* $N \to \infty$,

Théorème (4.2 : suite)

$$\sup_{0\le v\le 1}\left|\gamma_{N;n_1,n_2}\left(\frac{vh}{vh+(1-v)e}\right)-\left\{\mathcal{B}_N^{+}\circ H_m\left(\frac{vh}{vh+(1-v)e}\right)-4(2m+1)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{(2m-1)!}{2m\ \left((m-1)!\right)^2}\left(1+\sqrt{R_{N,m}}\right)\left(\frac{vh(1-v)e}{(vh+(1-v)e)^2}\right)^m\int_0^1\mathcal{B}_N^{+}\circ H_m(s)\ \mathrm{d}s\right\}\right|$$
$$=O_{\mathbb{P}}\left(N^{-1/4}\ (\log N)^{1/2}\right),\tag{17}$$

et

$$\sup_{0\le v\le 1}\left|\gamma_{N;n_1,n_2}\left(\frac{vh}{vh+(1-v)e}\right)-\left\{\mathcal{B}_N^{-}\circ H_m\left(\frac{vh}{vh+(1-v)e}\right)-4(2m+1)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{(2m-1)!}{2m\ \left((m-1)!\right)^2}\left(1-\sqrt{R_{N,m}}\right)\left(\frac{vh(1-v)e}{(vh+(1-v)e)^2}\right)^m\int_0^1\mathcal{B}_N^{-}\circ H_m(s)\ \mathrm{d}s\right\}\right|$$
$$=O_{\mathbb{P}}\left(N^{-1/4}\ (\log N)^{1/2}\right),\tag{18}$$

Théorème (4.2 : suite)

où

$$R_{N,m} = 1 - \frac{m}{2m+1}\left[\frac{N+1}{N+1+P} + \frac{N+1}{N+1+Q}\right]$$
$$= 1 - \frac{m}{2m+1}\left[\frac{N+1}{N_1+1} + \frac{N+1}{N_2+1}\right]. \qquad (19)$$

Merci pour votre attention !

E.-E.A.A. Aly.
Normalized spacings and goodness-of-fit tests.
J. Statist. Comput. Simulation, 36(2-3) :117–127, 1990.

E.-E.A.A. Aly, J. Beirlant, and L. Horváth.
Strong and weak approximations of k-spacings processes.
Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 66(3) :461–484, 1984.

E.E.A.A. Aly, J. Beirlant, and L. Horváth.
Strong and weak approximations of k-spacings processes.
Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 66(3) :461–484, 1984.

J. Beirlant.
Strong approximations of the empirical and quantile processes of uniform spacings.

In *Limit theorems in probability and statistics, Vol. I, II (Veszprém, 1982)*, volume 36 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 77–89. North-Holland, Amsterdam, 1984.

J. Beirlant.
Limit theory for spacing statistics from general univariate distributions.
Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 31(1) :27–57, 1986.

S. Blumenthal.
Contributions to sample spacings theory. I. Limit distributions of sums of ratios of spacings.
Ann. Math. Statist., 37 :904–924, 1966.

S. Blumenthal.
Contributions to sample spacings theory. II. Tests of the parametric goodness of fit and two-sample problems.
Ann. Math. Statist., 37 :925–939, 1966.

V.P. Borovikov.
Some limit theorems for statistics which are partial sums of functions of spacings.
Teor. Veroyatnost. i Primenen., 32(1) :92–104, 1987.

L. Le Cam.
Un théorème sur la division d'un intervalle par des points pris au hasard.
Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 7(3/4) :7–16, 1958.

D.R. Cox.
Some statistical methods connected with series of events.
J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 17 :129–157 ; discussion, 157–164, 1955.

N. Cressie.
On the logarithms of high-order spacings.

Biometrika, 63(2) :343–355, 1976.

N. Cressie.
Power results for tests based on high-order gaps.
Biometrika, 65 :214–218, 1978.

F. Czekała.
The asymptotic distributions of statistics based on logarithms of spacings.
Zastos. Mat., 21(4) :511–519, 1993.

D.A. Darling.
On a class of problems related to the random division of an interval.
Ann. Math. Statistics, 24 :239–253, 1953.

P. Deheuvels.
Strong bounds for multidimensional spacings.

Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 64(4) :411–424, 1983.

P. Deheuvels.
A Karhunen-Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge.
Statist. Probab. Lett., 77(12) :1190–1200, 2007.

P. Deheuvels.
Non-uniform spacings processes.
Stat. Inference Stoch. Process., 14(2) :141–175, 2011.

P. Deheuvels and G. Derzko.
Exact laws for sum of logarithms of uniform spacings.
32(1-2) :29–47, 2003.

P. Deheuvels and G. Derzko.
Tests of fit based on products of spacings.

In *Probability, statistics and modelling in public health*, pages 119–135. Springer, New York, 2006.

P. Deheuvels and G. Derzko.
A Glivenko-Cantelli-type theorem for the spacings-ratio empirical distribution functions.
Ann. I.S.U.P., 52(1-2) :25–38, 2008.

P. Deheuvels and G. Derzko.
Spacings-ratio empirical processes.
Period. Math. Hungar., 61(1-2) :121–164, 2010.

G.E. del Pino.
On the asymptotic distribution of k-spacings with applications to goodness-of-fit tests.
Ann. Statist., 7(5) :1058–1065, 1979.

E.J. Dudewicz and E.C. van der Meulen.

Entropy-based tests of uniformity.
J. Amer. Statist. Assoc., 76(376) :967–974, 1981.

M. Ekström.
Strong limit theorems for sums of logarithms of high order spacings.
Statistics, 33(2) :153–169, 1999.

I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik.
Table of integrals, series, and products.
Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh edition, 2007. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

P. Guttorp and R.A. Lockhart.
On the asymptotic distributions of high-order spacings statistics.

Canad. J. Statist., 17(4) :419–426, 1989.

M.G. Hahn and Y. Shao.
Limit theorems for the logarithm of sample spacings.
Statist. Probab. Lett., 24(2) :121–132, 1995.

P. Hall.
Limit theorems for estimators based on inverses of spacings of order statistics.
Ann. Probab., 10(4) :992–1003, 1982.

P. Hall.
Limit theorems for sums of general functions of *m*-spacings.
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 96(3) :517–532, 1984.

M. Jérémie.
Principe d'invariance du processus empirique du rapport des *m*-espacements uniformes disjoints.

A paraître dans la revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, 2012a.

M. Jérémie.
Lois limites de la statistique des fonctionnelles des rapports de *m*-espacements disjoints.
A paraître dans les Annales de l'I.S.U.P, 2012b.

J.A. Koziol.
A note on limiting distributions for spacings statistics.
Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 51(1) :55–62, 1980.

P. L'Ecuyer.
Tests based on sum-functions of spacings for uniform random numbers.
Journal of Statistical Computation and Simulation, 59 :251–269, 1997.

P. Lévy.
Sur la division d'un segment par des points pris au hasard.
C.R. Acad. Sci. Paris, 208 :147–149, 1939.

J.I. Naus.
A power comparison of two tests of non-random clustering.
Technometrics, 8 :493–517, 1966.

R. Pyke.
Spacings. (With discussion.).
J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 27 :395–449, 1965.

R. Pyke.
Spacings revisited.
In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California,*

Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I : Theory of statistics, pages 417–427, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.

B. Ranneby.
The maximum spacing method. An estimation method related to the maximum likelihood method.
Scand. J. Statist., 11(2) :93–112, 1984.

J.S. Rao.
Some tests based on arc-lengths for the circle.
Sankhyā Ser. B, 38(4) :329–338, 1976.

J. Sethuraman and J.S. Rao.
Pitman efficiencies of tests based on spacings.
In *Nonparametric Techniques in Statistical Inference (Proc. Sympos., Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1969)*, pages 405–415. Cambridge Univ. Press, London, 1970.

Y. Shao and M.G. Hahn.
Limit theorems for the logarithm of sample spacings.
Statist. Probab. Lett., 24(2) :121–132, 1995.

Y. Shao and R. Jiménez.
Entropy for random partitions and its applications.
J. Theoret. Probab., 11(2) :417–433, 1998.

A.F. Siegel.
Random arcs on the circle.
J. Appl. Probab., 15(4) :774–789, 1978.

A.F. Siegel.
Asymptotic coverage distributions on the circle.
Ann. Probab., 7(4) :651–661, 1979.

E. Slud.
Entropy and maximal spacings for random partitions.

Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 41(4) :341–352, 1977/78.

T. Swartz.
Goodness-of-fit tests using Kullback-Leibler information.
Comm. Statist. Simulation Comput., 21(3) :711–729, 1992.

B. van Es.
Estimating functionals related to a density by a class of statistics based on spacings.
Scand. J. Statist., 19(1) :61–72, 1992.

O. Vasicek.
A test for normality based on sample entropy.
J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 38(1) :54–59, 1976.

L. Weiss.
A certain class of tests of fit.

Ann. Math. Statist., 27 :1165–1170, 1956.

L. Weiss.
The asymptotic power of certain tests of fit based on sample spacings.
Ann. Math. Statist., 28 :783–786, 1957.

(H_0) : $\exists\ \mu \in \mathbb{R}$ tel que $F_X(t) = F_Y(t-\mu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ contre l'hypothèse (H_1) : $\nexists\ \mu \in \mathbb{R}$ tel que $F_X(t) = F_Y(t-\mu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Retour

Comme, de plus par définition dans la démonstration du théorème 2.1, on a posé que les suites de ponts Browniens $\{\mathcal{B}_N^+(v):\ 0 \le v \le 1\}$ et $\{\mathcal{B}_N^-(v) : 0 \le v \le 1\}$, vérifient l'identité distributionnelle,

$$\mathcal{B}_N^+(\cdot) \stackrel{d}{=} \mathcal{B}_N^-(\cdot) \stackrel{d}{=} B(\cdot).$$

Par conséquent, les versions des ponts Browniens centrés sur une moyenne, $B_{\left\{1+\sqrt{R_{N,1}}\right\}}(\cdot)$ et $B_{\left\{1-\sqrt{R_{N,1}}\right\}}(\cdot)$ approchant $\gamma_{N;n_1,n_2}(\cdot)$ sont identiquement distribuées puisque

$$B_{C_1}(\cdot) \stackrel{d}{=} B_{C_2}(\cdot) \iff C_1(C_1-2) = C_2(C_2-2).$$

Retour

Comme, de plus par définition dans la démonstration du théorème 4.1, on a posé que les suites de ponts Browniens $\left\{\mathcal{B}_N^+(v) :\ 0 \leq v \leq 1\right\}$ et $\left\{\mathcal{B}_N^-(v) : 0 \leq v \leq 1\right\}$, vérifient l'identité distributionnelle,

$$(\mathcal{B}_N^+ \circ H_m)(\cdot) \stackrel{d}{=} (\mathcal{B}_N^- \circ H_m)(\cdot) \stackrel{d}{=} (B \circ H_m)(\cdot).$$

Par conséquent, les versions des ponts Browniens centrés sur une moyenne, $(B \circ H_m)_{\left\{1+\sqrt{R_{N,m}}\right\}}(\cdot)$ et $(B \circ H_m)_{\left\{1-\sqrt{R_{N,m}}\right\}}(\cdot)$ approchant $\gamma_{N;n_1,n_2}(\cdot)$ sont identiquement distribuées puisque

$$(B \circ H_m)_{C_1}(\cdot) \stackrel{d}{=} (B \circ H_m)_{C_2}(\cdot) \iff C_1(C_1-2) = C_2(C_2-2).$$

Retour

Remarque (4.2)

1°) En posant, comme dans (4), $P/(N+1) \to c$ *et* $Q/(N+1) \to d$, *lorsque* $N \to \infty$, *nous obtenons que*

$$R_{N,m} \to R_{\infty,m} := 1 - \frac{m}{2m+1}\left[\frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d}\right],$$

avec la convention $1/\infty = 0$.

2°) Nous avons toujours $1 - \dfrac{2m}{2m+1} < R_{N,m} < 1$, *et de même,* $R_{\infty,m}$ *peut être pris pour chaque valeur possible dans* $\left[1 - \dfrac{2m}{2m+1}, 1\right]$. *Le seul cas où le processus limite de* $\gamma_{N;n_1,n_2}(.)$, *lorsque* $N \to \infty$, *est un pont Brownien est obtenu pour* $R_{\infty,m} = 1$, *ou équivalent, lorsque* $c = d = \infty$.

3°) Nous notons que, pour $e = h$, *le théorème 4.2 se réduit au théorème 4.1.*