



Caractérisation et modélisation de contrainte admissible en fatigue des matériaux

Émilie Miranda

Michel Broniatowski et Charles-Antoine Florentin

mars 2017

Sommaire

① Introduction

- Endommagement en fatigue
- Caractérisation de contrainte admissible

② Méthodologie d'estimation d'un quantile extrême

- Splitting
- Modélisation de la loi de la résistance
- Procédure séquentielle d'estimation

④ Résultats sur données simulées

⑤ Conclusion et perspectives

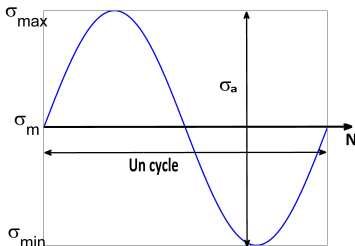
Endommagement en fatigue

Les pièces de turboréacteurs sont soumises à des sollicitations cycliques correspondant aux différentes phases de vol.

Enjeu industriel

Nécessité de maîtriser les risques de défaillance \implies prévoir la durée de vie des pièces.

- **Fatigue** : modification des propriétés du matériau suite à l'application de cycles d'effort.
- **Contrainte** : effort appliqué à une surface en MPa, caractérisé par :
 - son amplitude σ_a ;
 - sa moyenne σ_m ;
 - le rapport de charge R .



Contrainte admissible

Soient

- N la durée de vie du matériau en nombre de cycles ;
- s , l'amplitude de la contrainte appliquée sur la pièce (MPa) ;

Caractérisation du quantile à $\alpha \approx 0.1\%$ de défaillance

On appelle **contrainte admissible à n_0 au niveau α** la contrainte pour laquelle la probabilité de rupture à n_0 du matériau vaut α .

Elle est définie par :

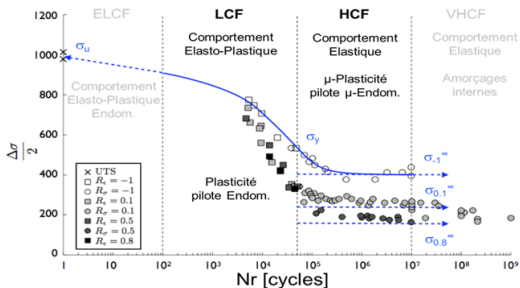
$$s_\alpha = \operatorname{argmax}_s \{ \mathbb{P}_s(N \leq n_0) \leq \alpha \} \quad (1)$$

où $\mathbb{P}_s(N \leq n_0) = \mathbb{P}(N \leq n_0 \mid S = s)$

Caractérisation de la tenue en fatigue

Méthodologie : réalisation d'essais à différents niveaux de contrainte et de rapport de charge jusqu'à rupture ou atteinte de n_0 .

Représentation : Diagramme de Wöhler



Objectifs

- Estimation robuste et précise de la contrainte minimale admissible en HCF pour un niveau de probabilité α très faible (de l'ordre de 10^{-3}).
- Mise au point d'une stratégie de caractérisation de la contrainte admissible à partir du plus petit nombre d'essais possible.

Formalisation

Soit $R = R_{n_0}$ v.a. positive continue correspondant à la résistance du matériau pour une durée de vie n_0 , homogène en la contrainte.

R est une variable latente, de loi \mathbb{P}_0 définie par :

$$\mathbb{P}_0(R \leq s) = \mathbb{P}_s(N \leq n_0) \quad (2)$$

La quantité cible s_α est le quantile d'ordre α de R :

$$s_\alpha = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \{ \mathbb{P}_0(R \leq s) \leq \alpha \} \quad (3)$$

Données

Données = résultats d'essais de fatigue

Un essai : application cyclique d'une contrainte sur une éprouvette jusqu'à rupture ou date de fin d'essai. Les essais sont coûteux et leur nombre doit être le plus faible possible. La valeur observée est $\min(N, n_0)$.

Information pertinente pour la variable d'intérêt R : $\mathbb{1}_{R \leq s} = \mathbb{1}_{N \leq n_0}$
(rupture ou non de l'éprouvette).

Les données sur R sont donc complètement censurées.

Sommaire

① Introduction

- Endommagement en fatigue
- Caractérisation de contrainte admissible

② Méthodologie d'estimation d'un quantile extrême

- Splitting
- Modélisation de la loi de la résistance
- Procédure séquentielle d'estimation

④ Résultats sur données simulées

⑤ Conclusion et perspectives

Splitting

Difficulté rencontrée : cibler un quantile d'ordre $\alpha \ll \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ pour n petit sous données dichotomiques.

Approche : décomposition de α en produit de probabilités d'ordre plus élevé \Rightarrow **approche par splitting**

Décomposition de $\{R \leq s_\alpha\}$:

Soit une série de m évènements inclusifs

$\{R \leq s_\alpha\} = \{R \leq s_m\} \subset \dots \subset \{R \leq s_1\}$, avec $s_\alpha = s_m < s_{m-1} < \dots < s_1$,

$$\mathbb{P}_0(R \leq s_\alpha) = \mathbb{P}_0(R \leq s_1) \prod_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}_0(R \leq s_{j+1} \mid R \leq s_j) \quad (4)$$

Objectif : en déduire une méthode séquentielle de planification d'essais.

Protocole d'essai

On fixe

- le nombre m de niveaux à tester ;
 - le niveau p des probabilités conditionnelles (entre 20 et 30 %) ;
 - le seuil initial s_1 .
- } tels que $p^m \approx \alpha$

Première étape

- n essais $Y_1^{(1)}, \dots, Y_n^{(1)} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}_0(R \leq s_1))$
- Détermination de s_2 , le quantile d'ordre p de la loi $R \mid R \leq s_1$.

Protocole d'essai

On fixe

- le nombre m de niveaux à tester ;
 - le niveau p des probabilités conditionnelles (entre 20 et 30 %) ;
 - le seuil initial s_1 .
- } tels que $p^m \approx \alpha$

Première étape

- n essais $Y_1^{(1)}, \dots, Y_n^{(1)} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}_0(R \leq s_1))$
- Détermination de s_2 , le quantile d'ordre p de la loi $R \mid R \leq s_1$.

Pour $j=2, \dots, m$

- n essais $Y_1^{(j)}, \dots, Y_n^{(j)} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}_0(R \leq s_j \mid R \leq s_{j-1}))$
- Détermination de s_{j+1} , le quantile d'ordre p de la loi $R \mid R \leq s_j$.

Protocole d'essai

On fixe

- le nombre m de niveaux à tester ;
 - le niveau p des probabilités conditionnelles (entre 20 et 30 %) ;
 - le seuil initial s_1 .
- } tels que $p^m \approx \alpha$

Première étape

- n essais $Y_1^{(1)}, \dots, Y_n^{(1)} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}_0(R \leq s_1))$
- Détermination de s_2 , le quantile d'ordre p de la loi $R \mid R \leq s_1$.

Pour $j=2, \dots, m$

- n essais $Y_1^{(j)}, \dots, Y_n^{(j)} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}_0(R \leq s_j \mid R \leq s_{j-1}))$
- Détermination de s_{j+1} , le quantile d'ordre p de la loi $R \mid R \leq s_j$.

$$\implies \hat{s}_\alpha = s_m$$

Sommaire

① Introduction

- Endommagement en fatigue
- Caractérisation de contrainte admissible

② Méthodologie d'estimation d'un quantile extrême

- Splitting
- **Modélisation de la loi de la résistance**
- Procédure séquentielle d'estimation

④ Résultats sur données simulées

⑤ Conclusion et perspectives

Loi limite de dépassements de seuil

Balkema et De Haan ; Pickands

La limite de la distribution des excès renormalisés d'une variable positive est une loi de Pareto généralisée ($GPD(c, a)$) :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\tilde{R} > \frac{x+s}{a} \mid \tilde{R} > s \right) = G(x)$$

où, G est de la forme :

$$1 - G(x) = \begin{cases} (1 + \frac{c}{a}x)^{-1/c} & \text{si } c \neq 0 \\ \exp(-\frac{x}{a}) & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x \geq 0 & \text{si } c \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{a}{c} & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

Modélisation de la loi de la résistance

Appliqué à la résistance R :

soit $\tilde{R} = \frac{1}{R}$,

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ x < s}} \mathbb{P}(R < x \mid R < s) = \lim_{\substack{\frac{1}{s} \rightarrow \infty \\ \frac{1}{x} > \frac{1}{s}}} \mathbb{P}\left(\tilde{R} > \frac{1}{x} \mid \tilde{R} > \frac{1}{s}\right) = G(x)$$

Hypothèse sur la loi :

$$\tilde{R} \sim GPD(c, a)$$

Motivations :

- Cadre général ;
- Lien avec le régime limite ;
- Propriétés de stabilité de la loi :

Si $\tilde{R} \sim GPD(c, a)$, alors $\tilde{R} - s \mid \tilde{R} > s \sim GPD(c, a + cs)$

Modèle de Pareto

La formule de splitting se réécrit avec \tilde{R} : pour une séquence de niveaux $\tilde{s}_m > \tilde{s}_{m-1} > \dots > \tilde{s}_1$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_0(\tilde{R} > \tilde{s}_m) &= \mathbb{P}_0(\tilde{R} > \tilde{s}_1) \prod_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}_0(\tilde{R} > \tilde{s}_{j+1} | \tilde{R} > \tilde{s}_j) \\
 &= \mathbb{P}_0(\tilde{R} > \tilde{s}_1) \prod_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}_0(\tilde{R} - \tilde{s}_j > \tilde{s}_{j+1} - \tilde{s}_j | \tilde{R} > \tilde{s}_j) \\
 &= \bar{G}(\tilde{s}_1) \prod_{j=1}^{m-1} \bar{G}_{\tilde{s}_j}(\tilde{s}_{j+1} - \tilde{s}_j) \\
 &= \left(1 + \frac{c\tilde{s}_1}{a_0}\right)^{-1/c} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 + \frac{c(\tilde{s}_{j+1} - \tilde{s}_j)}{a_j}\right)^{-1/c}
 \end{aligned}$$

où $a_j = a_0 + c\tilde{s}_j$

Sommaire

① Introduction

- Endommagement en fatigue
- Caractérisation de contrainte admissible

② Méthodologie d'estimation d'un quantile extrême

- Splitting
- Modélisation de la loi de la résistance
- Procédure séquentielle d'estimation

④ Résultats sur données simulées

⑤ Conclusion et perspectives

Procédure d'estimation

À chaque étape j ,

1. n essais en s_j : $Y_1^{(j)}, \dots, Y_n^{(j)}$, où $Y_i^{(j)} = \mathbb{1}_{R_i^{(j)} < s_j} = \mathbb{1}_{\tilde{R}_i^{(j)} > \tilde{s}_j}$

$\hat{p}_j = \frac{1}{n} \sum_i Y_i^{(j)} \Rightarrow I_\alpha =$ intervalle de confiance d'ordre α autour de p_j .

2. Détermination de l'ensemble

$$\mathcal{S}_j = \left\{ (\hat{c}_k, \hat{a}_k)_k : p_{j,k} = \bar{G}_{\hat{c}_k, \hat{a}_k} \in I_\alpha \right\}$$

3. Parmi \mathcal{S}_j ,

$$(\hat{c}^*, \hat{a}^*) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} |G_{(\hat{c}_k, \hat{a}_k)}^{-1}(\hat{p}_{j-1}) - s_{j-1}|$$

ou bien, critère pondéré :

$$(\hat{c}^*, \hat{a}^*) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=1}^j \lambda_\ell |G_{(\hat{c}_k, \hat{a}_k)}^{-1}(\hat{p}_\ell) - s_\ell|$$

avec $\sum_{\ell=1}^j \lambda_\ell = 1$.

Sommaire

① Introduction

- Endommagement en fatigue
- Caractérisation de contrainte admissible

② Méthodologie d'estimation d'un quantile extrême

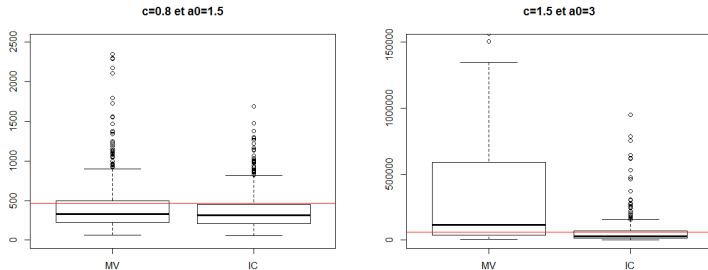
- Splitting
- Modélisation de la loi de la résistance
- Procédure séquentielle d'estimation

④ Résultats sur données simulées

⑤ Conclusion et perspectives

Résultats selon la valeur des paramètres

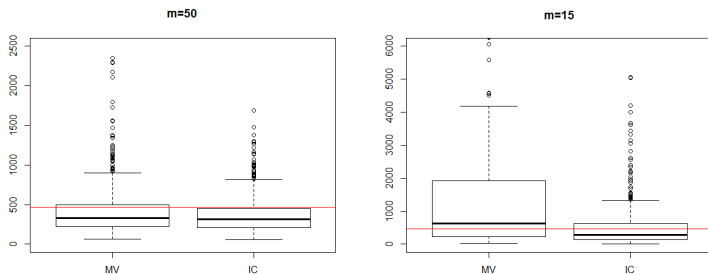
FIGURE – Estimation du quantile d'ordre alpha pour deux jeux de paramètres par la procédure par MV et par la procédure sur deux critères



Estimateurs biaisés, mais variabilité moindre avec la méthode d'estimation retenue par rapport à son alternative par maximum de vraisemblance.

Résultats selon le nombre d'essais par itération

FIGURE – Estimation du quantile d'ordre alpha pour $(c, a_0) = (0.8, 1.5)$ par la procédure par MV et par la procédure sur deux critères pour différentes valeurs de m



La méthode d'estimation retenue garantit la stabilité des résultats lorsque le nombre d'essais diminue.

Comparaison avec les résultats sur données complètes

Moyenne et écart-type des erreurs relatives sur le quantile d'ordre α de lois de Pareto sur données complètes et incomplètes pour des échantillons de $n=250$ essais.

Paramètres	Erreur relative sur le quantile d'ordre 0.001			
	Sur données complètes		Sur données incomplètes	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
$c = 0.8, a_0 = 1.5$ et $s_\alpha = 469.103$	0.052	0.257	-0.222	0.554
$c = 1.5, a_0 = 3$ et $s_\alpha = 63243.550$	0.116	0.625	0.310	0.590

Les estimations sur données dichotomiques sont obtenues en utilisant la procédure itérative. Pour les données complètes, la méthode d'estimation de quantile extrême proposée par De Valk [2] est utilisée.

Conclusion et perspectives

- Conclusion :
 - Apports :
 - méthode adaptée à la problématique et donnant des résultats plus robustes et précis que les méthodes existantes ;
 - méthode d'estimation combinant deux critères et assurant une meilleure stabilité des résultats.
 - Limites : biais et variabilité des estimations encore importants.
- Perspectives :
 - Étude des propriétés de convergence ;
 - Généralisation du modèle ;
 - Transposition en une stratégie d'essai.

Références (1)



Balkema A. A. and De Haan L.

Residual life time at great age.

Ann. Prob., 2(5) :762–804, 1974.



De Valk C.

A high quantile estimator based on the log-generalised weibull tail limit.

Econometrics and Statistics, 2016.



Pickands J.

Statistical inference using extreme order statistics.

Ann. Stat., 3(1) :119–131, 1975.



Biret M. and Broniatowski M.

Safip : a streaming algorithm for inverse problems.

2016.

Références (2)



Thorin O.

On the infinite divisibility of the pareto distribution.

Scand. Actuarial J., 1 :31–40, 1977.



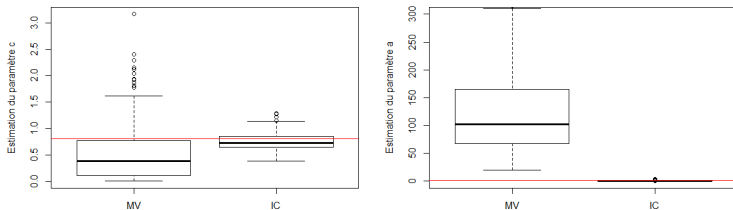
Feller W.

An introduction to probability theory and its applications, volume 2.

Wiley, 1971.

Estimations des paramètres

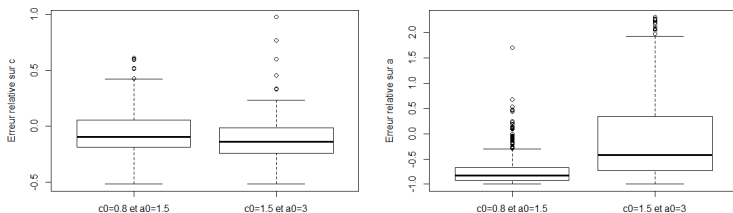
FIGURE – Estimation des paramètres c et a par la procédure par MV et par la procédure sur deux critères



La deuxième méthode stabilise grandement les estimations des paramètres, et en particulier du paramètre de dispersion a .

Estimations des paramètres

FIGURE – Estimation des paramètres c et a par la procédure sur deux critères sur deux jeux de paramètres



La précision des estimations décroît lorsque la loi de départ est à queue plus lourde, en particulier sur le paramètre a .

Méthode de De Valk

Objectif : estimation d'un quantile extrême d'ordre $p_n \in [n^{-\tau_1}; n^{-\tau_2}]$, avec $\tau_2 > \tau_1 > 1$ et n la taille de l'échantillon.

Soit un échantillon X_1, \dots, X_n de loi F . On note $X_{k:n}$ la k^e statistique d'ordre de l'échantillon.

Soit q définie par $q(y) = U(e^y) = F^{-1}(1 - e^{-y})$

Hypothèse sur la queue de distribution : pour $y > 0$, si $F(0) < 1$,

$$\log q \in \text{ERV}_\theta(g) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log q(y\lambda) - \log q(y)}{g(y)} = h_\theta(\lambda) \quad \lambda > 0 \quad (5)$$

avec g à variations régulières et $h_\theta(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\theta - 1}{\theta} & \text{si } \theta \neq 0 \\ \log \lambda & \text{si } \theta = 0 \end{cases}$

L'estimateur de $q(p_n)$, $z>0$, est donné par :

$$\hat{q}(p_n) = X_{n-l_n:n} \exp \left\{ g(\vartheta_{l_n,n}) h_\theta \left(\frac{p_n}{\vartheta_{l_{n+1},n}} \right) \right\} \quad (6)$$

sous des conditions sur la vitesse de croissance de la suite (l_n) , et pour $\vartheta_{k,n} = \mathbb{E}(E_{n-k:n}) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}$, l'espérance d'une statistique d'ordre d'une variable exponentielle standard.